Ecole polytechnique
Eco 311: Introduction à l'analyse économique
2010

Petite Classe n°4
Temps et incertitude

Exercice 1: *Valeur théorique d'une obligation.*

1. Calculer la valeur théorique d'une obligation de nominal 100 euros, remboursée en totalité l'année τ, dont l'intérêt nominal est r_0 (coupon annuel $c = 100\ r_0$). On notera r le taux d'actualisation et on se placera après le paiement du coupon l'année 0.

Cas particulier : $\tau = +\infty$ (rente perpétuelle).

2. Comment réagit cette valeur à des variations de r ? Analyser cette variabilité en fonction de τ (on supposera que r reste voisin de r_0).

Exercice 2: *Arbitrage sur le marché des changes*

On désigne respectivement par r_1 et r_2 les taux d'intérêt à 3 mois en euros et en dollars, τ le taux de change (le prix d'un dollar en euros) et t le prix en euros, du dollar à trois mois sur le marché à terme de devises. Montrer que si la relation de parité:

$$\frac{1+r_2}{1+r_1} = \frac{\tau}{t}$$

n'est pas vérifiée, il y a des possibilités d'arbitrage.

Exercice 3: *Arbitrage et bulle*

Un investisseur a le choix entre deux titres financiers: d'une part un titre sans risque de durée infinie qui rapporte un intérêt $r > 0$ par période; d'autre part, une action, dont le prix à la date t est noté p_t et qui rapporte un dividende d_t à la période t (c'est-à-dire entre les dates t et $t+1$). On suppose que les anticipations sont parfaites.

1. Ecrire la relation d'arbitrage entre les deux titres.

2. On suppose à présent que d_t est identique à chaque date, égal à d. Donner la solution de l'équation de récurrence issue de la relation d'arbitrage.

3. Montrer que le prix de l'action peut suivre un sentier qui le fait tendre vers l'infini. Interpréter.

On suppose à présent que les agents anticipent, à chaque date t, que le prix en $t+1$ sera égal à sa valeur fondamentale avec une probabilité q si le prix suit une dynamique divergente qui tend vers $+\infty$. Le retour à la valeur fondamentale peut résulter, par exemple, d'une intervention des pouvoirs publics, mais aussi d'un changement de la psychologie du marché.

4. Ecrire la nouvelle relation d'arbitrage.

5. Donner la solution de l'équation de récurrence issue de la relation d'arbitrage et commenter la dynamique du prix.

Exercice 4: *Consommation et épargne*

Soit un consommateur qui vit deux périodes. Au début de la première période, il décide de sa consommation et de son épargne, en anticipant les prix et ses revenus de la deuxième période. On suppose qu'il a accès à un marché financier parfait, c'est-à-dire qu'il peut prêter ou emprunter autant qu'il veut au même taux d'intérêt r. Son but est de maximiser une fonction d'utilité $U(C_1, C_2)$ où C_t est son volume de consommation à la période t.

1. Ecrire ses équations budgétaires pour la période 1 et la période 2 (anticipée) en fonction de p_1, p_2^a, R_1, R_2^a (prix et revenus). On notera E son épargne.
2. Montrer que le consommateur n'est concerné que par la somme actualisée de ses revenus, et non par leur répartition dans le temps.
3. Quel est l'effet d'une hausse du taux d'intérêt sur le montant de l'épargne?
4. Résoudre le programme d'optimisation dans le cas particulier: $U = C_1 C_2$.
5. Que se passe-t-il si le taux d'intérêt créditeur r_1 est inférieur au taux d'intérêt débiteur r_2?

Exercice 5. *Demande pour un actif risqué*

Un individu dispose d'une richesse de w euros qui peut être placée en un actif non risqué, qui rapporte un euro par euro placé, et un actif risqué, qui rapporte z euros par euro placé. On note f la fonction de densité de l'actif risqué et l'on suppose que $\int z f(z) \mathrm{d}z > 1$. Les préférences de l'individu sont représentées par une fonction d'utilité de von Neumann et Morgenstern, strictement croissante, strictement concave, deux fois continument dérivable, notée u. Montrer que l'individu investit un montant strictement positif dans l'actif risqué.